



中华人民共和国医药行业标准

YY/T 1418—2016/ISO 24157:2008

眼科光学和仪器 人眼像差表述

Ophthalmic optics and instruments—Reporting aberrations of the human eye

(ISO 24157:2008, IDT)

2016-01-26 发布

2017-01-01 实施

国家食品药品监督管理总局 发布

目 次

前言	I
1 范围	1
2 规范性引用文件	1
3 术语和定义	1
4 坐标系	4
5 波前数据的表示	5
5.1 以泽尼克多项式函数系数的形式来表示波前数据	5
5.2 以波前梯度场或波前像差函数值的形式来表示波前数据	8
5.3 梯度拟合误差	8
6 人眼像差的数据表示	8
6.1 概述	8
6.2 以归一化泽尼克系数的形式来表示的像差数据	9
6.3 以数值/方位角度方式表示的归一化泽尼克系数的形式来表示的像差数据	9
6.4 以地形图的形式来表示的像差数据	10
6.5 综合像差的数据表示	11
附录 A (资料性附录) 求解泽尼克系数的方法	13
附录 B (资料性附录) 对不同的孔径尺寸、偏心和坐标系旋转的泽尼克系数换算	15
附录 C (资料性附录) 用不同符号系统表示的泽尼克系数之间的换算	21
附录 D (资料性附录) 求解非归一化泽尼克多项式函数的偏导数加权矩阵的计算机程序算法	23
附录 E (资料性附录) 归一化泽尼克多项式函数表(到第六径向阶数)	25

前 言

本标准按照 GB/T 1.1—2009 给出的规则起草。

本标准使用翻译法等同采用 ISO 24157:2008《眼科光学和仪器 人眼像差表述》(英文版)。请注意本文件的某些内容可能涉及专利。本文件的发布机构不承担识别这些专利的责任。

本标准由国家食品药品监督管理总局提出。

本标准由全国医用光学和仪器标准化分技术委员会(SAC/TC 103/SC 1)归口。

本标准起草单位:浙江省医疗器械检验院。

本标准主要起草人:颜青来、贾晓航、骆永洁、张沁园。

眼科光学和仪器 人眼像差表述

1 范围

本标准规定了人眼像差表述的标准方法。

2 规范性引用文件

下列文件对于本文件的应用是必不可少的。凡是注日期的引用文件,仅注日期的版本适用于本文件。凡是不注日期的引用文件,其最新版本(包括所有的修改单)适用于本文件。

ISO 8429 光学和光学仪器 眼科学 分度盘刻度(Optics and optical instruments—Ophthalmology—Graduated dial scale)

3 术语和定义

下列术语和定义适用于本文件。所用到的符号见表1。

表1 符号

符号	名称	给出定义的章节
$A(m\theta, \alpha)$	泽尼克函数数值/方位角度形式的子午项	5.1.9
c_n^m	泽尼克系数	3.3
c_{nm}	泽尼克系数 数值	5.1.9
m	泽尼克函数的子午指数	3.2
$M_n^m(m\theta)$	泽尼克函数的子午项	3.2.3
n	泽尼克函数的径向指数	3.2
N_n^m	泽尼克函数的归一化项	3.2.5
$R_n^{ m }(\rho)$	泽尼克函数的径向项	3.2.1
Z_n^m	泽尼克函数[另一种符号为: $Z(n, m)$]	3.2
Z_{nm}	泽尼克函数 数值/方位角度形式	5.1.9
α	泽尼克函数数值/方位角度形式的系数变换角	5.1.9
ρ	泽尼克函数径向参数	3.2.2
θ	泽尼克函数子午参数	3.2.4
$W(x, y)$	波前像差	3.4
$\beta_{x,y}$	x, y 处测量出的梯度值	3.8
$\partial W(x, y)$	x, y 处的波前梯度	3.8
β_{fit}	梯度拟合误差	5.3

3.1

视线 line of sight

视线是从物方空间的注视点到眼睛入瞳中心,继而从出瞳中心到视网膜的固视点(通常称中心凹)的连线。

3.2

泽尼克多项式函数 Zernike polynomial function

泽尼克多项式函数是已定义的一整套函数中的一个,在单位圆上正交,它是归一化项、径向项和子午项三项的乘积,还有参数化的无量纲的径向参数 ρ 和无量纲的子午参数 θ ,指定的非负径向整数指数 n 和有正负之分的子午指数 m ,该函数由以下等式表示:

$$Z_n^m = N_n^m R_n^{|m|}(\rho) M(m\theta) \dots\dots\dots (1)$$

在该等式中:

N_n^m 是归一化项;

$R_n^{|m|}$ 是径向项;

$M(m\theta)$ 是子午项;

参数 ρ 是实数,连续范围为 0 到 1.0;

参数 θ 是实数,连续范围为 0 到 2π 。

注:对于给定值径向指数 n ,子午指数 m 只能取 $-n, -n+2, \dots, n-2$ 和 n 中的值。

3.2.1

径向项 radial term

下列等式中给出了带有指数 n 和 m 的泽尼克多项式函数径向项的表示:

$$R_n^{|m|}(\rho) = \sum_{s=0}^{0.5(n-|m|)} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [0.5(n+|m|-s)]! [0.5(n-|m|-s)]!} \rho^{n-2s} \dots\dots\dots (2)$$

s 表示单位内整数和的增量指数。

3.2.2

径向参数 radial parameter ρ

ρ 无量纲,在 0 到 1 之间取值,其值是孔中心到一点的径向距离 r (极径),表达式为:

$$\rho = \frac{r}{a} \dots\dots\dots (3)$$

式中:

a ——孔径的半径值。

3.2.3

子午项 meridional term

下列等式给出了带有指数 m 的泽尼克多项式函数子午项的表示:

$$M(m\theta) = \cos(m\theta) \quad \text{若 } m \geq 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$M(m\theta) = \sin(|m|\theta) \quad \text{若 } m < 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

注:子午项也称方位角项。

3.2.4

子午参数 meridional parameter θ

该角度值的取值范围在 0° 与 360° 之间,在第 4 章坐标系中有它的表示形式。

注:它也被称为方位角(极角)。

3.2.5

归一化项 normalization term

下列等式给出了带有指数 n 和 m 的泽尼克多项式函数归一化项,在“非归一化”函数(3.2.7)和“归

一化”函数(3.2.6)所示的方程式中,其值分别等于 1,0。

$$N_n^m = \sqrt{(2 - \delta_{0,m})(n+1)} \dots\dots\dots (6)$$

在该等式中:

若 $m=0, \delta_{0,m}=1$; 若 $m \neq 0, \delta_{0,m}=0$ 。

3.2.6

归一化泽尼克多项式函数 normalized Zernike polynomial function

归一化泽尼克多项式函数的归一化项为 3.2.5 中给出的形式,该归一化函数满足下列等式时被定义为正交的:

$$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} Z_n^m Z_{n'}^{m'} d\theta = \pi \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \dots\dots\dots (7)$$

在该等式中:

若 $n=n', \delta_{n,n'}=1$; 若 $n \neq n', \delta_{n,n'}=0$;

若 $m=m', \delta_{m,m'}=1$; 若 $m \neq m', \delta_{m,m'}=0$ 。

3.2.7

非归一化泽尼克多项式函数 un-normalized Zernike polynomial function

非归一化泽尼克多项式函数的归一化项等于 1,0,该非归一化函数满足下列等式时被定义为正交的:

$$(2 - \delta_{0,m})(n+1) \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} Z_n^m Z_{n'}^{m'} d\theta = \pi \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \dots\dots\dots (8)$$

在该等式中:

若 $n=n', \delta_{n,n'}=1$; 若 $n \neq n', \delta_{n,n'}=0$;

若 $m=m', \delta_{m,m'}=1$; 若 $m \neq m', \delta_{m,m'}=0$;

若 $m=0, \delta_{0,m}=1$; 若 $m \neq 0, \delta_{0,m}=0$ 。

3.2.8

阶数 order

泽尼克多项式函数中径向指数 n 的值。

3.3

泽尼克系数 Zernike coefficient

一组实数集中的一个, c_n^m 乘以与之相应的泽尼克函数得出一项值,该项值随后用于计算总项值,总项值又等于用泽尼克项拟合的表面 $S(\rho, \theta)$ 的最佳估计值,总项值表示如下:

$$S(\rho, \theta) = \sum_{\text{所有 } n \text{ 和 } m} c_n^m Z_n^m \dots\dots\dots (9)$$

注 1: 每一组泽尼克系数都与孔径直径有关,该孔径直径用于从表面高度数据中得到这组泽尼克系数。这一组系数要有孔径信息才完整。

注 2: 附录 A 给出了从波前倾斜度(梯度)数据中求解泽尼克系数的方法。

3.3.1

归一化泽尼克系数 normalized Zernike coefficient

用归一化泽尼克函数得到泽尼克系数,并用它们设计重建表面。

注: 归一化泽尼克系数有长度量纲单位。

3.3.2

非归一化泽尼克系数 un-normalized Zernike coefficient

用非归一化泽尼克函数得到泽尼克系数,并用它们设计重建表面。

注: 非归一化泽尼克系数有长度量纲单位。

3.4

人眼的波前像差 wavefront error (of an eye) $W(x, y)$ 或 $W(r, \theta)$

人眼的波前像差为人眼入瞳处的平面波前和从视网膜点源出射的光波波前之间的光程(也就是物理距离乘以折射率),称为入瞳坐标(x, y 或 r, θ)的波前像差函数。

注 1: 波前像差的测量方向是按照从光瞳面到波前的轴向方向(也就是与第 4 章坐标系中的 z -轴平行的方向)。

注 2: 按照惯例,通过将所有瞳孔位置的值减去中心值的方法把瞳孔中心的波前像差设定为零。

注 3: 波前像差以 m 为物理单位(通常用 μm),从属于规定的波长。

3.5

光程差 optical path-length difference OPD

每个点波前像差值(3.4)的负数表示要校正该波前像差所需的光程。

3.6

波前像差的均方根值 root mean square wavefront error RMS

人眼波前像差的 RMS 值计算方法为波前像差(3.4)函数的方差的平方根,定义公式如下:

$$RMS_{WFE} = \sqrt{\frac{\iint_{\text{瞳孔}} [W(x, y)]^2 dx dy}{A}} \dots\dots\dots (10)$$

式中:

A ——瞳孔面积。

或者,如果波前像差函数用归一化泽尼克系数项来表示,就相当于带有径向指数 2 或更大指数的泽尼克系数平方和的平方根:

$$RMS_{WFE} = \sqrt{\sum_{n>1, \text{所有 } m} (c_n^m)^2} \dots\dots\dots (11)$$

注 1: 平移项和平均倾斜度要排除计算范围之内,因为它们相当于图像的横向位移而非图像自身退化。

注 2: 也可以用波前像差值的离散集来求均方根值,波前像差值可以用来产生泽尼克系数和标准统计方法。得到均方根值后,或许会发现该均方根值与用以上公式求得的不完全一致。这很可能是瞳孔中用于抽样的波前像差的位置形成了间隔不均匀的网格。那么数据集就不会导出离散的、正交的泽尼克函数。

3.7

高阶像差 higher order aberrations

人眼中除了球-柱镜面屈光不正和棱镜误差之外,如果以泽尼克多项式函数系数项来表示波前像差,那么阶数是 3 和更高阶的那些像差则表示高阶像差。

3.8

波前梯度 wavefront gradient $\partial W(x, y)$

在 x 和 y 处,波前梯度值 $\partial W(x, y)/\partial x$ 和 $\partial W(x, y)/\partial y$ 的向量,用泽尼克多项式系数表示如下:

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = \sum_{\text{所有 } n \text{ 和 } m} c_n^m \frac{\partial Z_n^m(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \sum_{\text{所有 } n \text{ 和 } m} c_n^m \frac{\partial Z_n^m(x, y)}{\partial y} \dots\dots\dots (12)$$

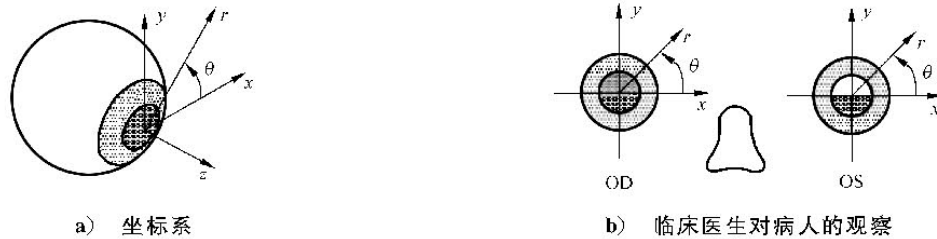
注: 在 x, y 处,测量出的梯度值用 $\beta_x(x, y)$ 和 $\beta_y(x, y)$ 表示。

4 坐标系

用于表示波前表面的坐标系应该是符合 ISO 8429 的标准眼科坐标系,在该坐标系中 x -轴是水平方向,它的正指向为当检查员检查待测眼睛时的右方向, y -轴为垂直方向,它的正指向高于待测眼睛, z -轴是待测眼睛的视线方向,它的正指向为从眼睛看检查员的方向。坐标系的水平和垂直方向的原点是眼睛可视瞳孔的中心点。坐标系的原点位于眼睛出瞳平面上(为视网膜上产生的光经过瞳孔出射的点)。该坐标系如图 1 所示。

能适用在任意位置上的波前像差值的符号法则应该也要适用于该坐标系。

当泽尼克系数表示波前或记录波前像差时,用于描述单个泽尼克函数的符号法则也要适用于该坐标系。



说明:

OD 右眼;

OS 左眼。

图 1 眼科坐标系(ISO 8429)

5 波前数据的表示

5.1 以泽尼克多项式函数系数的形式来表示波前数据

5.1.1 泽尼克多项式函数的符号

泽尼克多项式函数应该由大写字母 Z 加上紧随其上标和下标来表示。上标应该是表示函数子午指数的带符号整数 m 。下标应该是表示函数径向指数的非负整数 n 。因此泽尼克多项式函数应该写成 Z_n^m 的形式。

如果由于字体原因不能写成上下标的形式,那么泽尼克多项式函数也可以写成大写字母 Z 后跟圆括号的形式,括号中前面是径向指数 n ,然后加一个逗号,最后为子午指数 m ,也就是 $Z(n, m)$ 的形式。

5.1.2 径向指数

径向指数应该用小写字母 n 来表示。

5.1.3 子午指数

子午指数应该用小写字母 m 来表示。

5.1.4 径向参数

径向参数应该用希腊字母 ρ 表示。

5.1.5 子午参数

子午参数应该用希腊字母 θ 表示。

5.1.6 系数

当一个表面由泽尼克系数表示时,这些系数应该用希腊字母 c 加上紧随其上标和下标来表示。上标应该是表示函数子午指数的带符号整数 m 。下标应该是表示函数径向指数的非负整数 n 。因此泽尼克系数应该写成 c_n^m 的形式。

5.1.7 泽尼克多项式函数的常用名

提及泽尼克多项式函数时习惯用它的常用名。表 2 中给出了目前为止函数的常用名。

表 2 泽尼克多项式函数的常用名

泽尼克函数	常用名
Z_0^0	平移
Z_1^{-1}	垂直倾斜
Z_1^1	水平倾斜
Z_2^{-2}	斜轴散光
Z_2^0	近视性离焦(正系数值) 远视性离焦(负系数值)
Z_2^2	逆规性散光(正系数值) 循规性散光(负系数值)
Z_3^{-3}	斜向三叶形
Z_3^{-1}	垂直彗差 高度陡斜(正系数值) 垂直彗差 轻度陡斜(负系数值)
Z_3^1	水平彗差
Z_3^3	水平三叶形
Z_4^{-4}	斜向四叶形
Z_4^{-2}	二级斜轴散光
Z_4^0	球差 正系数值 瞳孔外围比中间部分近视程度高 负系数值 瞳孔外围比中间部分远视程度高
Z_4^2	二级循规性/逆规性散光
Z_4^4	四叶形
Z_5^{-5}	二级垂直彗差
Z_5^{-3}	二级水平彗差

5.1.8 用不同孔径尺寸求得的泽尼克系数来表示像差数据之间的比较

泽尼克系数值可描述给定的波前像差,当从测量数据中求该泽尼克系数值时,依赖于所使用的孔径尺寸。由于要依赖于瞳孔的直径,当瞳孔尺寸的测量值变化时我们会求得不同的系数值来描述某个特定眼睛的波前像差。因此为了用泽尼克系数来充分地比较同一只眼睛不同时间段的波前像差或者比较两只眼睛的波前像差,即使测量时使用不同的瞳孔直径,进行比较的泽尼克系数也必须是由相同瞳孔直径得出的。由一个瞳孔直径得出的泽尼克系数能转变为用附录 B 的方法或者类似方法得出的较小瞳孔直径的泽尼克系数值。

按照此标准,当用泽尼克系数来比较波前像差时,应当在转换为通用瞳孔直径的泽尼克系数集之间进行。

5.1.9 以数值/方位角度方式表示的泽尼克系数形式来表示波前像差数据

有同一个径向阶数 n 和具有量值相同但符号相反的子午指数 m 的泽尼克项,可以表示为在角度空间中具有对应 m 量值的一个向量的两个分量。因此就有可能将与 3.2 中具有同样径向阶数 n 以及相同量值的子午指数的函数联合在一起构成一组新的泽尼克函数,定义为:

$$Z_{nm}(\rho, \theta, \alpha) = N_n^m R_n^{|m|}(\rho) A(m\theta, \alpha) \dots\dots\dots (13)$$

在该等式中

$R_n^{|m|}(\rho)$ 的定义见 3.2.1;

N_n^m 的定义见 3.2.5;

$$A(m\theta, \alpha) = \cos[m(\theta - \alpha)]$$

其中 α 是一个系数变换角,能给出空间向量的方向。

像这类波前像差的表面 $S(\rho, \theta)$,用上述泽尼克函数表示如下:

$$S(\rho, \theta) = \sum_{\text{所有 } n \text{ 和 } m} c_{nm} Z_{nm}(\rho, \theta, \alpha_{nm})$$

其中,由以下等式定义的系数 c_{nm} 和系数变换角 α_{nm} 与 3.3 中定义的系数有关:

$$c_{nm} = \sqrt{(c_n^{-m})^2 + (c_n^m)^2} \dots\dots\dots (14)$$

$$\alpha_{nm} = \frac{a \tan\left(\frac{c_n^{-m}}{c_n^m}\right)}{|m|} \dots\dots\dots (15)$$

5.1.10 以数值/方位角度方式表示的泽尼克多项式函数的常用名

提及泽尼克多项式函数时习惯用它的常用名。表 3 中列出了目前为止在 5.1.9 中定义的数值/方位角度方式表示的泽尼克函数的常用名。

表 3 以数值/方位角度方式表示的泽尼克多项式函数的常用名

泽尼克函数	常用名
Z_{00}	平移
Z_{11}	倾斜
Z_{20}	近视性离焦(正系数值) 远视性离焦(负系数值)
Z_{22}	散光 逆规性,轴线-180° 循规性,轴线-90°
Z_{31}	彗差
Z_{33}	三叶形
Z_{40}	球差 正系数值 瞳孔外围比中间部分近视程度高 负系数值 瞳孔外围比中间部分远视程度高
Z_{42}	二级散光
Z_{44}	四叶形
Z_{61}	二级彗差

5.2 以波前梯度场或波前像差函数值的形式来表示波前数据

5.2.1 梯度值

用波前像差仪获得的人眼像差测量值通常是波前像差函数梯度的测量值。这一类型的测量值也可以认为是人眼光学系统中光线偏离正常方向上的测量值。对于来自视网膜且经过出瞳的光线,要从这光线到另一条位于相同瞳孔位置、但与视线平行的光线测量其偏差。对于从入瞳进入眼睛的光线,要从这条光线到另一条进入眼睛、与视线平行且经过折射后与视网膜相交的在视线与视网膜相交的点上的光线测量其偏差。梯度信息包括人眼出瞳平面上所测光线的二维位置及其偏差的两个组成部分。

因此这一信息可以转换成标准形式,每个所测光线的数据或其在波前的位置将包含四个数据。前两个数据是笛卡尔坐标形式中的水平坐标(x)和垂直坐标(y),这在第 4 章坐标系中有详细说明,且用 mm 表示。后两个数据是梯度的水平和垂直组成值,或者说后两个数据是给定正切值的光线在水平和垂直方向的偏差。

可选择性地给出数据 5,反映与每个数据位置信息相关的质量水平或确切性。

5.2.2 波前像差值

如果人眼像差包括波前像差函数本身的价值,那么在波前给定位置上将其表示出来所需要的信息包括位置和该位置上的波前像差函数值。

所以这一信息可以转换成标准形式。每个所测光线的数据或者其在波前的位置包含三个数据。前两个数据是笛卡尔坐标形式中的水平坐标(x)和垂直坐标(y),在第 4 章坐标系中有详细说明,且用 mm 表示。第三个数据是用 μm 表示的波前像差(3.4)值。

可选择性地给出数据 4,反映与每个数据位置信息相关的质量水平或确切性。

5.3 梯度拟合误差

如果波前像差函数通过测量到的波前梯度数据重建,并且重建波前的数据以 5.1 中提到的梯度场或者 5.2 中提到的波前像差函数本身的形式来表达,那么这一信息必须为每个数据位置各提供两个附加值,这些附加值给出重建数据的拟合质量信息。第一个数值是测量到的 x 梯度值和重建的 x 梯度值之间的差别。第二个数值是测量到的 y 梯度值和重建的 y 梯度值之间的差别。这两种数值被定义为梯度拟合误差,构成误差梯度场的两个组成部分。这两种数值不能等同于 5.1 和 5.2 中提到的可选质量值,因为后者指测量到的数据本身的质量,而梯度拟合值指的是重建波前数据的拟合质量。

以十进制来测量的梯度拟合参数 β_{fit} 可以用于确定整体拟合质量。它通常是最小二乘拟合的优化函数,定义如下:

$$\beta_{fit} = \sqrt{\frac{\sum_{x,y} \left[\beta_x(x,y) - \frac{\partial W(x,y)}{\partial x} \right]^2}{N} + \frac{\sum_{x,y} \left[\beta_y(x,y) - \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} \right]^2}{N}} \dots\dots\dots (16)$$

各种参数详见 3.8。

6 人眼像差的数据表示

6.1 概述

与他人交流人眼像差数据并让他们像亲眼所见那样对其进行分析的首选方法为以 5.2.1 中详细说明的每个测量位置建立一整套梯度分量。这些数值充分显示了测量到的人眼波前像差的特点,也可以用来以任何所需方法重建波前像差表面。

然而,以梯度分量形式的波前数据并不会使波前信息转变为易懂的形式,也不能方便地用于书面形式、设备显示形式以及其他常用通信形式。因此表现人眼像差数据的首选方法有:

- a) 用归一化泽尼克系数列表表示像差数据;
- b) 用归一化泽尼克系数柱状图来显示像差数据;
- c) 用波前表面的地形图来表示像差数据。

6.2 以归一化泽尼克系数的形式来表示的像差数据

6.2.1 孔径信息

当人眼像差的数据用归一化泽尼克系数表示时,用来求得系数的孔径直径将成为数据集的一部分且居于首位。

6.2.2 单位

系数以 μm 为单位。孔径尺寸以 mm 为单位。

6.2.3 项的顺序

当人眼像差的数据用泽尼克系数表示时,这些系数必须按照以下顺序列出。

系数集的第一个值应该是用来求得该集的孔径直径,之后是被共用径向指数 n 分成组的泽尼克系数,这些组按照径向指数量值的递增顺序列出。在一组共用径向指数 n 内,这些系数应该按照子午指数 m 的递增顺序列出,从 m 最小负值递增到 m 最大正值。以下单个指数 j 给出了以上泽尼克系数的顺序。该集的第一个泽尼克系数的顺序指数为零。

$$j = \frac{n(n+2)+m}{2} \dots\dots\dots (17)$$

6.2.4 表示形式

6.2.4.1 表格形式

当用表格来表示归一化泽尼克系数时,表格的第一列应该包含依照 6.2.3 中泽尼克函数符号。第二列应该包含系数的数值且要与它们各自的函数符号相一致。如果需要标出泽尼克函数的名称,那么这些名称要放在第三列。表格的第一行中第一列要包含“孔径直径”的字样,第二列要包含孔径直径的值。

6.2.4.2 柱状图形式

用柱状图来表示归一化泽尼克系数时,应该根据 6.2.3 将分配到各柱条的归一化泽尼克系数值按顺序排列。依照 5.1.1 使用泽尼克双指数符号标明柱条。柱条值的单位应是 μm 。用于求得系数值的孔径直径应出现在图中。

6.3 以数值/方位角度方式表示的归一化泽尼克系数的形式来表示的像差数据

6.3.1 孔径信息

当人眼像差的数据用归一化泽尼克系数表示时,用来求得系数的孔径直径必须是数据集的一部分且必须居于首位。

6.3.2 单位

系数以 μm 为单位。孔径尺寸以 mm 为单位。轴以 $^{\circ}$ 为单位。

6.3.3 项的顺序

当人眼像差的数据根据 5.1.9 用数值/方位角度方式表示的泽尼克系数表示时,系数 c_{nm} 和 α_{nm} 必须按照以下顺序列出。

系数集的第一个值应该是用来求得该集的孔径直径,之后是系数 c_{nm} 和 α_{nm} ,它们被共用径向指数 n 分成组,这些组按照径向指数量值的递增顺序列出。在一组共用径向指数 n 内,这些系数应该按照子午指数 m 量值的递增顺序列出。

6.3.4 表格表示形式

当用表格形式来表示归一化泽尼克系数时,表格的第一列应该包含依照 6.3.3 中泽尼克函数符号。第二列应该包含系数的数值且要与它们各自的函数符号相一致。第三列应该包括轴的数值且要与它们各自的函数符号相一致。如果需要标出泽尼克函数的名称,那么这些名称要放在第四列。表格的第一行中第一列要包含“孔径直径”的字样,第二列要包含孔径直径的值。

6.4 以地形图的形式来表示的像差数据

6.4.1 概述

为了更好地阐述和对比不同系统的波前测量,我们建立了人眼波前像差标准图形显示的标准。图形显示的要素有:颜色设置、像差范围、颜色等值线图、数字数据、空间规模和标题。如果符合本标准,那么人眼波前像差的标准显示就应该向用户推广而且应该包含“本标准 YY/T 1418”的字样。

6.4.2 显示内容

6.4.2.1 标准显示

标准显示应该包含以下要素:

- 标题;
- 颜色示例图;
- 步距文字说明;
- 高阶像差的颜色等值线图(如有可能的话波长为 $0.555 \mu\text{m}$);
- 数字数据;
- 空间幅度指示;
- 轴线指示;
- 参考“本标准 YY/T 1418”。

6.4.2.2 显示标题

显示的标题应该是“高阶像差”。

6.4.2.3 颜色等值线图

颜色等值线图展示了人眼入瞳高阶像差的颜色编码表示法。如果可能的话,像差的波长应为 $0.555 \mu\text{m}$ 。等值线图的中心值应该与主光线一致,为零。

6.4.2.4 数字数据

显示在图上的数字数据应该包括:

- 以 μm 为单位,计算二阶低阶像差的 RMS 值;

- 以 μm 为单位,计算三阶及三阶以上高阶像差的 RMS 值;
- 以 μm 为单位,计算二阶及二阶以上总像差的 RMS 值;
- 以 μm 为单位的瞳孔直径。

6.4.2.5 空间幅度图

空间幅度图展示了颜色等值线图的大小。它应该包含一些图形指示和以 mm 为单位的显示宽度的文字说明。

6.4.2.6 轴线指示

轴线指示图展示了第 4 章坐标系中所定义的角坐标系。

6.4.3 标准标度

要显示高阶像差,标准显示应该采用以下四个步距间隔中的一个:

0.1 μm , 0.2 μm , 0.5 μm , 1.0 μm

步距应该明确显示在颜色图例下面。应该用二十一种颜色且中间颜色设置为零。如果要显示的像差值超过了颜色标度范围,那么应该用最高或者最低(视情况而定)颜色标度。

6.4.4 颜色调色板

二十一种颜色应该遵循以下一般指导原则:

- 3.5 中定义的波前像差为负值的地方用较冷色系(蓝色色系);
- 3.5 中定义的波前像差为正值的地方用较暖色系(红色色系);
- 3.5 中定义的波前像差为零的地方用绿色。

6.5 综合像差的数据表示

6.5.1 概述

要进行眼像差的多样性研究,就需要提交合并后的结果。合并结果出来后,要让它具有意义还需要在分析和显示数据时采取一定的预防措施。在来自多种渠道和多个个体的数据集中,几乎可以肯定并非所有的数据都来自瞳孔大小一样的眼睛。因此应该用步距来解释瞳孔尺寸变化时发现的像差值的变化。同时很有可能在一项研究中涵盖了对左眼和右眼的研究。在这种情况下要认可这一事实且要考虑到左眼和右眼的结构上的不对称现象。

6.5.2 基于泽尼克系数集的合并像差结果分析和表示

当一项研究的数据形式为泽尼克系数时,那么在数据的收集、分析和显示时就需要采取一定的预防措施。这是由于描述波前的泽尼克系数值会发生变化,因为如果孔径直径发生变化,那么即使给出的泽尼克系数符合国际标准它也会发生变化。所以只有使用通用瞳孔直径后才可直接将系数进行对比。鉴于此,分析合并数据集的第一步是将所有的泽尼克系数集转变为有着相同瞳孔尺寸的数据集。可以用 B.2 中的方法进行操作。

如果数据给出的形式是 5.2.1 或者 5.2.2 中的形式而合并后的结果又是泽尼克系数的形式,那么要用相同瞳孔直径得到的数据来求得这些系数。

6.5.3 左右眼合并的像差数据的分析和表示

当合并数据集用到了左眼和右眼的数据时,需要考虑左眼和右眼垂直子午线的不对称性。可用两

种方法之一进行操作。

若像差数据包含左右眼的测量值且没有改变该测量值来弥补已知的不对称性,那么更好的方法是分别对左眼和右眼进行数据分析和结果表示。如果确定要在同一项分析中合并左眼和右眼的数据,那么就要明确指出这一做法。

如果确定要在同一分析中合并左眼和右眼的数据且基于泽尼克系数集的分析 and 描述也已完成,那么二眼结构上的不对称可能是改变所有泽尼克系数符号的原因,该系数由先前分析的带负号偶数子午指数和带正号奇数子午指数的所有左眼的泽尼克多项式产生。这一步骤能够产生给予左眼跟右眼同样的不对称性的效果。

如果数据给出的形式为 5.2.1 中的梯度阵列或者 5.2.2 中的升序阵列,那么右/左眼的不对称性的原因可能是在数据分析之前改变了左眼所有 x 位置值的符号。这一步骤能够产生给予左眼跟右眼同样的不对称性的效果。

用以上任意一个步骤来解释右眼和左眼的不对称性后,这一事实应该被明确指出。

附录 A
(资料性附录)
求解泽尼克系数的方法

一般来说,像差分析仪能够测量人眼波前的倾斜度(表面梯度)。哈特曼方法和空间分辨折射测量技术直接测量波前倾斜度,切尔宁方法和视网膜膜光线追踪技术测量与波前倾斜度成比例的横向光线误差。倾斜度的测量值是波前的倾斜,既有水平方向也有垂直方向。对于波前像差 $W(x, y)$,像差分析仪给出了倾斜度测量值的集合 $\{dW(x_i, y_i)/dx\}$ 和 $\{dW(x_i, y_i)/dy\}$ 。 i 值的变化范围为从 1 到样本点的总数 N 。点 (x_i, y_i) 代表单个样本的位置。基于该倾斜度信息重建波前像差的最普遍的方法是将待拟合数据放入多项式集 $\{V_j\}$ 中,用最小二乘法拟合,其中 j 取值范围为个体到拟合集的多项式总数 J 。一般来说,波前拟合的多项式集是泽尼克多项式或者泰勒多项式。一般习惯选择这些集是因为它们具备用眼科光学来表示相似概念的特性。不过也可以用其他多项式集。最小二乘法将被测波前梯度和重建波前偏导数之间的绝对误差减少到最小。5.3 中给出了典型的优化函数 β_{fit} 。要完成这一拟合,我们建立了一个矩阵方程:

$$[dV] \vec{a} = d\vec{W} \quad \dots\dots\dots (A.1)$$

在该等式中:

$$[dV] = \begin{bmatrix} dV_1(x_1, y_1)/dx & dV_2(x_1, y_1)/dx & \dots & dV_J(x_1, y_1)/dx \\ dV_1(x_2, y_2)/dx & dV_2(x_2, y_2)/dx & \dots & dV_J(x_2, y_2)/dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ dV_1(x_N, y_N)/dx & dV_2(x_N, y_N)/dx & \dots & dV_J(x_N, y_N)/dx \\ dV_1(x_1, y_1)/dy & dV_2(x_1, y_1)/dy & \dots & dV_J(x_1, y_1)/dy \\ dV_1(x_2, y_2)/dy & dV_2(x_2, y_2)/dy & \dots & dV_J(x_2, y_2)/dy \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ dV_1(x_N, y_N)/dy & dV_2(x_N, y_N)/dy & \dots & dV_J(x_N, y_N)/dy \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (A.2)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_J \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (A.3)$$

并且:

$$d\vec{W} = \begin{bmatrix} dW(x_1, y_1)/dx \\ dW(x_2, y_2)/dx \\ \vdots \\ dW(x_N, y_N)/dx \\ dW(x_1, y_1)/dy \\ dW(x_2, y_2)/dy \\ \vdots \\ dW(x_N, y_N)/dy \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (A.4)$$

本质上来说, $[dV]$ 矩阵包含拟合多项式的倾斜度信息。矩阵的上面一半包含拟合多项式的偏导数 x , 下面一半包含拟合函数的偏导数 y 。 $[dV]$ 矩阵中的每一行都是一个给定的样本点 (x_i, y_i) 。矩阵中的每一列是一个不同的拟合多项式 V_j 。向量 \vec{a} 是一系列加权系数, 描述了每个拟合多项式对重建波前

的贡献度。向量 $d\vec{W}$ 包含由像差分析仪测得的数据。矩阵的上面一半包含 x 的偏导数信息,而矩阵的下面一半描述了 y 的偏导数数据。向量 $d\vec{W}$ 的每一行都是一个不同的样本点 (x_i, y_i) 。重建的目标是确定向量 \vec{a} 中的系数值。由于在拟合波前时,通常样本点 N 会比多项式 J 更多,等式(A.1)的精确解是不可得的。相反,我们能计算出最小二乘解,表示如下:

$$\vec{a} = [[dV]^T [dV]]^{-1} [dV]^T d\vec{W} \quad \dots\dots\dots (A.5)$$

式中, $[dV]^T$ 是矩阵 $[dV]$ 的转置阵, $[[dV]^T [dV]]^{-1}$ 是矩阵求逆运算。等式(A.5)包含了拟合系数的计算。最终的重建波前 $W(x, y)$ 由以下等式得出:

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^J a_j V_j(x, y) \quad \dots\dots\dots (A.6)$$

因此,一旦像差分析仪获得了倾斜度信息,那么重建波前就需要明确的矩阵运算。

最后值得一提的是要给予系数集 \vec{a} 正确的单位和缩放比例。所测得的梯度值 $d\vec{W}$ 和所用多项式函数集各函数梯度组成部分、在测量位置估计的元素 $[dV]$ 都是无量纲值,而 \vec{a} 中的值应该有长度单位。这样当它们乘以各个给定位置的多项式的值时,得出的总和是有长度单位的高度值。如果泽尼克函数构成了多项式集,且用等式(A.5)求得的系数集 \vec{a} 乘以用于重建的孔径半径从而得出在等式(A.6)中用到的正确的系数集 \vec{a} ,那么就会得出正确的缩放比例。

附录 B (资料性附录)

对不同的孔径尺寸、偏心和坐标系旋转的泽尼克系数换算

B.1 概述

这一附录给出的信息是将用给定原点和旋转方向的坐标系求得的泽尼克系数集转变为另一个具有第二坐标原点和/或旋转方向的系数集的方法。同时还给出了将代表第一孔径直径内一个区域的波前的系数集转变为代表第二孔径直径的区域内同一个波前的系数集的方法。当所有可用的波前像差信息都包含在泽尼克系数集中时,如果要像差进行互相比或者要做总体的数据分析,那么就必须要采用这些方法。这些方法为研究人眼像差错位校正的光学/视觉效果以及研究人眼有像差时的瞳孔尺寸变化的光学/视觉效果提供了分析工具。

如果拥有了关于以完整测量数据集(如 5.2 中所详细说明了的数据集)为形式的人眼像差的所有信息,那么这些信息就能最好地解释偏心、旋转、用完整数据集的所选部分来恢复瞳孔的正常尺寸以及重建波前及其完整数据所产生的效果等。这是因为泽尼克系数集代表了对有限基本函数集中基本数据的拟合,因此可能被认为是一种数据压缩的形式,而这种形式中有些信息不可避免地会丢失。如果由原始函数集所代表的原始数据的最佳拟合不能很好地拟合数据区的所选部分,那么很有可能选择数据区的一部分和重新拟合会得出更加可靠的结果,而不会从算数上转变用本附录中所给的方法最初求得的泽尼克系数。

B.2 对不同孔径尺寸的泽尼克系数换算

一般而言,像差分析仪的测量值会有不同的瞳孔尺寸。以这些数据为基础来计算波前时,得出的波前通常用泽尼克多项式来表示。将泽尼克多项式归一化使其拥有单位半径。将两个不同的波前进行对比时,瞳孔尺寸可能不一样。所以由于瞳孔归一化的差别,不能直接对比泽尼克展开系数。要进行对比就需要重新计算较大瞳孔尺寸的波前测量值来拟合有着较小瞳孔尺寸的瞳孔的波前。然而,对于波前拟合度较差的梯度数据(由 5.3 中描述的大梯度拟合参数 β_{in} 来确定)来说,这样做会导致严重的误差。在重新计算较小直径瞳孔的泽尼克系数之前要严谨地考虑这一参数。如果可以,原始梯度数据应该对较小的瞳孔进行重新拟合以避免这一潜在的问题。

有许多方法可以将泽尼克系数按比例调整到符合不同的瞳孔尺寸。以下给出的方法能够方便地实现算法。

首先,比例 η 是原始孔径尺寸除新的孔径尺寸形成的。接下来的对角矩阵 $[\eta]$ 是通过以下公式中 η 的幂形成的。首先通过径向指数 n 在泽尼克系数集中取的最大值即阶数 n_{max} 来让该集中的项在下列不标准形式中变成有序项。首先用子午指数 m 沿正方向从该集的最小负值 $m = -n_{max}$ 开始到该集的最大正值 $m = n_{max}$ 将项划分成组。然后在每组 m 内将函数按照径向指数从最小值 $n = |m|$ 到整个集的最大值进行排序。在一组子午指数 m 内, n 的容许值必须与 m 有着相同的奇偶性。如果 m 的奇偶性与 n_{max} 相同,那么该组的最大径向指数值为 n_{max} 。反之则为 $n_{max} - 1$ 。现在用函数行向量来详细说明有序的泽尼克函数:

$$\langle Z | = \left[Z_{n_{max}}^{n_{max}}, Z_{n_{max}-1}^{(n_{max}-1)}, Z_{n_{max}-2}^{(n_{max}-2)}, Z_{n_{max}-2}^{(n_{max}-2)}, \dots, Z_{n_{max}-2}^{n_{max}-2}, Z_{n_{max}-1}^{n_{max}-1}, Z_{n_{max}}^{n_{max}} \right] \dots \dots \dots (B.1)$$

首先从上面左边的第一个元素对角元素 $[\eta]$ 一直到右下方的对角元素,代入与 η 相等的值, η 被升为与 $\langle Z|$ 对应元素的径向阶数的幂,从左至右贯穿 $\langle Z|$ 。

其次,形成分块对角矩阵 $[R]$,它的块元素 $[R(n, m)]$ 各自与一个子午指数 m 相联系,它的各列也同与 $[\eta]$ 中相应对角位置匹配的径向指数 n 相联系。每一列从上到下的元素都是径向项 $R_n^{(m)}(\rho)$ 的加权系数(在 3.2.1 中提到)。

再其次,通过代入 3.2.4 中为矩阵 $[R]$ 内同一位置的值 n 和 m 而给出的值 N_n^m 来形成对角矩阵 $[N]$ 。

最后,形成置换矩阵 $[P]$ 并对下列公式中的原始系数集进行重新排序。整个有序原始泽尼克系数集由系数值的一个向量表示,代表公式为:

$$|c\rangle = \begin{pmatrix} c_0^0 \\ c_1^{-1} \\ \vdots \\ c_n^m \\ \vdots \end{pmatrix} \dots\dots\dots (B.2)$$

与列向量 $|c\rangle$ 有着相同行数,自身行数和列数相同的方阵 $[P]$ 的元素最初全部为零。然后矩阵的每一行中有一个元素被置为 1。 $[P]$ 的每一行与系数值重新排序后的向量 $|c'\rangle$ 中的相同行有关联。在一个给出的行中,1 被放在与元素 $|c\rangle$ 的行数相同的列中,也被放入选定行 $|c'\rangle$ 中。

这样形成的矩阵与其逆矩阵一起结合形成转换矩阵 $[C]$,其公式如下:

$$[C] = [P]^T [N]^{-1} [R]^{-1} [\eta] [R] [N] [P] \dots\dots\dots (B.3)$$

通过原始系数 $|c\rangle$ 形成了调整过的系数 $|c'\rangle$,用以下矩阵等式表示:

$$|c'\rangle = [C] |c\rangle \dots\dots\dots (B.4)$$

B.3 对坐标原点偏心的泽尼克系数换算

如果用泽尼克分解法来分析同一个波前数据,用第一次选择的坐标原点,和用第二次选择的坐标原点,得出的系数也不同。因此在对比泽尼克系数集或者用它们有某种目的时所使用的预先设定的坐标原点,必须注意要自始至终采用同一个坐标系。如果首选坐标系中坐标系转化(偏心)的数量已知,最好是 x 和 y 的偏心值已知,那么通过以下方法泽尼克系数可以转变为首选体系。

任何解析函数,例如以 3.3 中加权泽尼克多项式总和来表示的表面,如果在 $S(x, y)$ 的 (x, y) 位置上有一个值和所有阶数的偏导数,那么这个解析函数就可以用下面的泰勒展开式在 $(x + dx, y + dy)$ 位置上进行估测:

$$S(x + dx, y + dy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k S(x, y) \dots\dots\dots (B.5)$$

同时任何函数,如 $S(x, y)$,还可以用完整的正交函数集 $Z_n^m(x, y)$ 和合适的加权系数 c_n^m 来展开,表示如下:

$$S(x, y) = \sum_{\text{所有 } n \text{ 和 } m} c_n^m Z_n^m(x, y) \dots\dots\dots (B.6)$$

将(B.6)代入(B.5)得:

$$S(x + dx, y + dy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \sum_{\text{所有 } n \text{ 和 } m} c_n^m Z_n^m(x, y)$$

由于 c_n^m 不是 x 或 y 的函数,所以它不受偏微分算子的影响,因此将表达式重新整理得:

$$S(x + dx, y + dy) = \sum_{\text{所有 } n \text{ 和 } m} c_n^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k Z_n^m(x, y) \dots\dots\dots (B.7)$$

等式(B.7)的使用需要对所有正交集的全部阶数的偏导数进行计算和求值。然而对于一个第一个

偏导数可以展开为原始集本身的特殊正交函数集,等式(B.7)的求值可以简化为下列等式。泽尼克多项式函数代表一个由 Noll 首次提出的特殊的正交函数集(见参考书目[3])。

下列等式给出了非归一化泽尼克函数以及一阶导数之间的关系:

$$\frac{\partial}{\partial x} Z_n^m = (1 + \delta_{m0}) \left[\sum_{n'=|m|+1}^{n-1} (n'+1) Z_{n'}^m \langle |m|+1 \rangle + (1 - \delta_{m0}) (1 - \delta_{m, -1}) \sum_{n'=|m|-1}^{n-1} (n'+1) Z_{n'}^m \langle |m|-1 \rangle \right] \dots\dots\dots (B.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Z_n^m = (1 + \delta_{m0}) \frac{m}{|m|} \left[\sum_{n'=|m|+1}^{n-1} (n'+1) Z_{n'}^m \langle |m|+1 \rangle - (1 - \delta_{m0}) (1 - \delta_{m1}) \sum_{n'=|m|-1}^{n-1} (n'+1) Z_{n'}^m \langle |m|-1 \rangle \right] \dots\dots\dots (B.9)$$

式中:

若 $a=b$ 时, $\delta_{ab}=1$; $a \neq b$ 时, $\delta_{ab}=0$, 且在总和中 n' 要加上 2。

要注意的是,如果 $(|m|+1)$ 大于 $(n-1)$,那么(B.8)和(B.9)中的第一个总和是不存在的,因为泽尼克多项式函数的结构决定了 n 必须始终大于或等于 $|m|$ 。

由以下总和给出非归一化泽尼克函数的一阶偏导数:

$$\frac{\partial Z_n^m(x,y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} D_{x_{ij}} Z_n^m(x,y) \dots\dots\dots (B.10)$$

$$\frac{\partial Z_n^m(x,y)}{\partial y} = \sum_{j=1}^{\infty} D_{y_{ij}} Z_n^m(x,y) \dots\dots\dots (B.11)$$

其中 $D_{x_{ij}}$ 和 $D_{y_{ij}}$ 是加权系数, i 是正在求导的泽尼克函数的指数对 (n,m) 中的一个指数标号, j 是按照 6.2.3 设定的整个泽尼克函数集的一个指数标号。

列向量设定的所有泽尼克函数的一阶偏导数表示如下:

$$| \partial Z_x \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} Z_0^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} Z_1^1 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x} Z_n^m \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad | \partial Z_y \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} Z_0^0 \\ \frac{\partial}{\partial y} Z_1^1 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y} Z_n^m \\ \vdots \end{pmatrix}$$

由以下列向量设定的泽尼克函数集为:

$$| Z \rangle = \begin{pmatrix} Z_0^0 \\ Z_1^1 \\ \vdots \\ Z_n^m \\ \vdots \end{pmatrix}$$

以及以下两个矩阵的加权系数为:

$$[D_x] = \begin{bmatrix} D_{x_{11}} & D_{x_{12}} & \dots & D_{x_{1j}} & \dots \\ D_{x_{21}} & D_{x_{22}} & \dots & D_{x_{2j}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ D_{x_{j1}} & D_{x_{j2}} & & D_{x_{jj}} & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad [D_y] = \begin{bmatrix} D_{y_{11}} & D_{y_{12}} & \dots & D_{y_{1j}} & \dots \\ D_{y_{21}} & D_{y_{22}} & \dots & D_{y_{2j}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ D_{y_{j1}} & D_{y_{j2}} & & D_{y_{jj}} & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

等式(B.10)和(B.11)给出的所有等式都可以用以下简化矩阵方程来表示:

$$\begin{aligned} | \partial Z_x \rangle &= [D_x] | Z \rangle \\ | \partial Z_y \rangle &= [D_y] | Z \rangle \end{aligned} \dots\dots\dots (B.12)$$

现在要考虑特殊正交函数的二阶偏导数。例如,我们可以用式(B.12)将有关 x 的二阶偏导数写成:

$$\frac{\partial}{\partial x} | \partial Zx \rangle = \frac{\partial}{\partial x} [Dx] | Z \rangle$$

由于没有一个系数矩阵 $[Dx]$ 的元素是 x 的函数,因此该等式可变为:

$$\frac{\partial}{\partial x} | \partial Zx \rangle = [Dx] \left(\frac{\partial}{\partial x} | Z \rangle \right) = [Dx] | \partial Zx \rangle = [Dx] [Dx] | Z \rangle$$

定义符号:

$$\frac{\partial}{\partial x} | \partial Zx \rangle = | \partial Zxx \rangle ; \quad \frac{\partial}{\partial y} | \partial Zx \rangle = | \partial Zxy \rangle ; \quad \frac{\partial}{\partial y} | \partial Zy \rangle = | \partial Zyy \rangle$$

特殊正交函数的三个二阶偏导数的等式可以写为:

$$\begin{aligned} | \partial Zxx \rangle &= [Dx] [Dx] | Z \rangle = [Dx]^2 | Z \rangle \\ | \partial Zxy \rangle &= [Dx] [Dy] | Z \rangle \quad \dots\dots\dots (B.13) \\ | \partial Zyy \rangle &= [Dy] [Dy] | Z \rangle = [Dy]^2 | Z \rangle \end{aligned}$$

同时,要注意在混合子集中应用转换矩阵的顺序对解析函数 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$ 是不重要的。对高阶混合偏导数也是如此。

等式(B.13)要注意的很重要的一点是不仅不需要先求得任何特殊正交集的偏导数就能求得二阶偏导数,而且也不需要求得新的系数矩阵。一旦求得一阶偏导数矩阵的元素,那么只需要再用矩阵乘法就可以计算出二阶偏导数。

求高阶偏导数时可以重复这一公式,特殊正交函数集的第 n 阶次偏导数的普通表达式为:

$$| \partial Z x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n \rangle = [Dx]^n [Dy]^n | Z \rangle \quad \dots\dots\dots (B.14)$$

现在简化等式(B.7)的所有必需元素都具备了。

要求得等式(B.7)的内在和需要计算正交集的每一个偏导数,但正如刚才所指出的,这对于特殊正交集是不必要的。因此通过用矩阵算子 $[Dx]$ 和 $[Dy]$ 分别确定偏导数算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$, 等式(B.7)可以写为:

$$S(x + dx, y + dy) = \langle c | \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} (dx [Dx] + dy [Dy])^k | Z(x, y) \rangle \quad \dots\dots (B.15)$$

等式(B.6)含有内积公式,因此将系数 c_n^m 的行向量定义为:

$$| c \rangle = (c_0^0 \quad c_1^1 \quad \dots \quad c_n^m \quad \dots)$$

等式(B.6)就变成了:

$$S(x, y) = \sum_{\text{所有 } n \text{ 和 } m} c_n^m Z_n^m(x, y) = \langle c | Z(x, y) \rangle$$

从而形成以上等式(B.13)中的公式。

量 $\left[\sum_k \frac{(-1)^k}{k!} (dx [Dx] + dy [Dy])^k \right]$ 是一个矩阵,因为它包含矩阵积和常数 k 、 dx 和 dy 。它不是位置变量 x 和 y 的函数,因此可以将它放入单个矩阵中分别求值。这样的单个矩阵叫做转化矩阵 $[T]$ 。这就使得等式(B.15)可以写成:

$$S(x + dx, y + dy) = \langle c | [T] | Z(x, y) \rangle \quad \dots\dots\dots (B.16)$$

式中:

$$[T] = \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} (dx [Dx] + dy [Dy])^k \quad \dots\dots\dots (B.17)$$

由于特殊正交集是完整的集,因此它们的组成元素是无穷的,但在实际应用中,只用到了有限的一部分子集。在泽尼克多项式中,任一多项式的最高指数幂是其本身的径向阶数。因此所有高于多项式

阶数的幂指数都等于零,并且总和 T 中 k 的值永远不需要高于被选中的集求得的最高阶数。

泽尼克多项式函数的矩阵算子 $[D_x]$ 和 $[D_y]$ 是很简单的。它们的对角线所有元素都包含零的下三角稀疏矩阵。说它们“稀疏”是因为矩阵下三角部分的许多元素都为零。在 Noll 论文中有关归一化泽尼克函数的表述中给出了求其非零值的方法。归一化泽尼克函数是径向多项式、正弦子午函数和归一化常数的乘积。归一化常数的典型形式为平方根,这就使得矩阵中许多非零元素包含平方根。不过如果用非归一化泽尼克函数(乘积中缺少归一化常数),而且矩阵中所有的非零元素都是简单的整数,那么就可以很容易地建立非归一化泽尼克函数矩阵。由于泽尼克函数是乘积,因此用泽尼克函数的内积及其各自的系数求 $S(x, y)$ 时,归一化因数可以被包含在(归一化)泽尼克函数中或者(非归一化)系数中。因此,如果一个得到了归一化形式的系数,一个希望用 $[D_x]$ 和 $[D_y]$ 的一般式,那么在应用于等式 (B.13) 之前归一化系数就已经通过分别乘以正确的归一化因数转变成了非归一化系数。用标准双指数 Z_n^m 标明泽尼克函数时,归一化因数由以下给出:

$$N_n^m = \sqrt{(2 - \delta_{m0})(n + 1)}$$

其中, δ_{m0} 是克罗内克符号且等于零 ($m=0$ 时除外)。

由于求得加权矩阵是一项比较复杂的计算任务,因此附录 D 中给出了完成该任务的计算机程序算法。

注:同时见参考书目[6],它提供了结合 B.2、B.3 和 B.4 给出的泽尼克系数转化的方法和计算机程序算法。

B.4 对坐标系旋转的泽尼克系数转变

如果用泽尼克分解法来分析同一个波前数据,第一次用某一个坐标系,第二次再用第一个经过旋转得到的坐标系,这样求得的系数是不一样的。因此在对比泽尼克系数集或者用它们有某种目的时所使用的预先设定的坐标原点,必须注意要自始至终采用同一个坐标系。如果首选坐标系中坐标系旋转的数量已知,那么通过以下方法泽尼克系数可以转变为首选体系。

以极坐标形式表现出来的泽尼克函数的检查显示对于任何一个挑选出来的径向指数值 n ,每个容许子午指数 $|m|$ 都有两个项。一个指数的值为 $-m$,另一个值为 $+m$ 。这两个项可以看做整个泽尼克函数空间里多角度子空间中一个向量的分量(见 5.1.9)。子空间的重数是 $|m|$ 的值。至于泽尼克函数的旋转,最好不要单独考虑函数本身,而要和形成向量组成部分的 n 与 $|m|$ 指数值一起考虑。正是这些泽尼克子空间的向量在起作用。

当从以上确定的子空间向量来考虑泽尼克函数时,我们可以看到空间旋转的效果就是这些向量的旋转。旋转时它们的量值并不会改变。只有子空间向量组成部分的比例改变了。通常用径向指数将泽尼克函数按照阶数来分组。然而要顾及旋转的效果,就最好将它们按照子午指数进行子午子空间分组来考虑。然后在物理空间中按照角度 ϕ 进行旋转,转变后的泽尼克系数就可以由二维空间中旋转的标准公式来求得。

$$c_n^{m'} = \cos\beta_m c_n^m - \sin\beta_m c_n^{-m} \quad \dots\dots\dots (B.18)$$

$$c_n^{-m'} = \sin\beta_m c_n^m + \cos\beta_m c_n^{-m} \quad \dots\dots\dots (B.19)$$

其矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} c_n^{m'} \\ c_n^{-m'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_m & -\sin\beta_m \\ \sin\beta_m & \cos\beta_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_n^m \\ c_n^{-m} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (B.20)$$

要按照某种顺序例如从 0 到 n 阶次来处理泽尼克系数集的旋转,最方便的方法使将未旋转的系数例如列向量进行排序,其中要用特殊旋转矩阵 $[R]$ 来操作这一向量从而得出旋转系数的列向量。旋转矩阵可以由以下因素组成。旋转矩阵是方阵,行和列的数值与所选系数的数值相同。旋转矩阵的每一列都与一个未旋转的系数相联系。旋转矩阵的每一行也与一个未旋转的系数相联系。除了与用来求得该行旋转系数的未旋转系数相联系的两列中的元素,其他每一行的元素都为零。如果将系数按照以上

例子进行排序,非零元素便是矩阵中那些按照上述顺序排列的元素。

我们知道矩阵[R]是分块对角矩阵,因为除了位于矩阵对角中心的分块中的元素,其他元素都为零。在矩阵[R]中块是方形的。每个径向阶数都有一个方块,方块的大小为(n+1)的平方。方块对角处的元素有着与n的值相等的|m|的值。方块(n+2)由方块n加上较大方块对角的项构成。中心没有改变,除了对角处,其他部分的新元素都是零。左上方和右下方的象限可以求得余弦项。左下方和右上方的象限可以求得正弦项。左下方象限中的正弦项是负值。

对泽尼克系数按照 6.2.3 中详述的进行排序时,以上对于旋转矩阵的描述可以表示为:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cos 2\phi & 0 & -\sin 2\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\phi & 0 & \cos 2\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 3\phi & 0 & 0 & -\sin 3\phi & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin 3\phi & 0 & 0 & \cos 3\phi & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \dots\dots\dots (B.21)$$

整个有序泽尼克系数集旋转由一个向量表示:

$$|c\rangle = \begin{bmatrix} c_0^0 \\ c_1^{-1} \\ \vdots \\ c_n^m \\ \vdots \end{bmatrix} \dots\dots\dots (B.22)$$

因此由一个向量表示的转变后的系数由以下等式求得:

$$|c'\rangle = [R] |c\rangle \dots\dots\dots (B.23)$$

附录 C (资料性附录)

用不同符号系统表示的泽尼克系数之间的换算

C.1 概述

尽管这一标准详述了报告人眼像差的坐标系、用于表示这些像差的泽尼克多项式符号以及用于表示这些像差的泽尼克多项式系数集的顺序,但是在光学领域还存在着其他几种定义泽尼克多项式函数的方法,同时也需要将该标准的定义与其他定义结合起来。鉴于此,以下内容给出了不同体系与本标准中规定的体系之间的转换。

有几种泽尼克多项式的定义集用了五十多年。这些定义主要在以下三方面有区别:归一化、坐标系和顺序。这些包含了表 C.1 中的定义。

表 C.1

体系	归一化 ^a	极参考坐标 ^b	顺序 ^c
本标准	包含的	x -轴	垂直/水平
美国光学学会眼科	包含的	x -轴	垂直/水平
泽尼克	单独的	y -轴	水平/垂直
Malacara/Born 和 Wolf	单独的	y -轴	水平/垂直
Noll/Arizona		y -轴	特殊
Fringe			特殊

注: 见参考书目中 Noll^[3], Malacara^[2], Born 和 Wolf^[1] 体系。

^a 归一化指的是被包括在多项式定义中(以及系数的计算中)的归一化因数(见 3.2.5), 或者是需要时单独计算的归一化因数。这一归一化因数经过调整使每个多项式中的 $\sigma^2 - 1$ 。

^b 坐标系指的是测量极角时的参考轴线。在 Malacara/Born 和 Wolf 体系中以及泽尼克的原始论文中, 参考轴线从正 y -轴沿顺时针方向测量。这与数学运算中常用的一般的右手坐标系不同。该标准使用了标准眼科坐标系(ISO 8429), 美国光学学会眼科体系也是如此, 它是一种从 x -轴沿逆时针方向来测量角度的右手坐标系。

^c 顺序指的是各种项在多项式表中列出的顺序。这一标准的坐标惯例与 Malacara/Born 和 Wolf 的坐标惯例不同, 它保持了相同泽尼克定义的极坐标形式, 该标准中这些奇数项的顺序与 Malacara/Born 和 Wolf 集中的相反。因此表的首位是垂直彗差而非水平彗差。因此这一顺序就以彗差项的顺序为特征。这种顺序的改变也导致了一些项的符号的改变。Noll/Arizona 集对顺序进行了特别挑选, 为了对称项能够排在前列与顺序相一致, 这些效果于光学系统中是常见的。

C.2 Malacara/Born、Wolf 系数集与本标准系数集之间的换算

通过使用下面的公式, 一个用集合形式描述的多项式可以很容易地转换为另一种用集合形式描述的多项式。

从本标准中的 (Z_n^m) 转换为 Malacara/Born 和 Wolf (V_n^l)

$$l = (-1)^n m$$

$$scale = \begin{cases} \frac{m}{|m|} (-1)^{|m|/2} & m \text{ 为偶数时} \\ (-1)^{(|m|-1)/2} & m \text{ 为奇数时} \end{cases} \dots\dots\dots (C.1)$$

$$V_n^l = (scale) \sqrt{(2 - \delta_{m0})(n+1)} Z_n^m$$

其中当 $m=0$ 时, $\delta_{m0}=1$; 否则 $\delta_{m0}=0$ 。

从 Malacara/Born 和 Wolf (V_n^l) 转换为本标准中的 (Z_n^m)

$$m = (-1)^n l$$

$$scale = \begin{cases} \frac{l}{|l|} (-1)^{|l|/2} & l \text{ 为偶数时} \\ (-1)^{(|l|-1)/2} & l \text{ 为奇数时} \end{cases} \dots\dots\dots (C.2)$$

$$Z_n^m = \frac{(scale)V_n^m}{\sqrt{(2 - \delta_{l0})(n+1)}}$$

其中, 当 $l=0$ 时, $\delta_{l0}=1$; 否则 $\delta_{l0}=0$ 。

注: Malacara 也使用符号(U_m)其中 $m = (n-l)/2$ 。所以这个“ m ”与本标准中的“ m ”是不一样的。Born 和 Wolf 也使用 $m = |l|$, 所以这个“ m ”是本标准中的“ m ”的绝对值。

附 录 D
(资料性附录)

求解非归一化泽尼克多项式函数的偏导数加权矩阵的计算机程序算法

以下是一个用 MatLab 代码编写的用于求偏导数加权矩阵的程序例子,偏导数加权矩阵需要采取附录 B.3 中给出的为说明坐标原点偏心对泽尼克系数转换方法。

```
function[Dx,Dy]=zpartials(order)
% ZPARTIALS 求得 x 和 y 偏导数加权
%矩阵,容许偏导数的 Dx 和 Dy
%非归一化泽尼克多项式函数需要形成
%通过详细的径向阶数(阶数)
%作为泽尼克函数本身的总和
%[Dx,Dy]=zpartials(order)

terms= fix(.5 * order * (order+3))+1;%项数
Dx=zeros(terms);%初始化 x 偏导数矩阵
Dy=zeros(terms);%初始化 y 偏导数矩阵
r=0;%初始化行数
c=0;%初始化列数

for i=1:order+1 % i=n+1,其中 n 是函数的径向指数
    %它的局部会形成
    for j=1:i % 与方位指数 m 有关的指数
        r=r+1;
        m=2 * j-i-1;
        if m==0
            delta=1;
        else
            delta=0;
        end
        mm=abs(m)-1;
        mp=abs(m)+1;
        s=sign(m);
        if s==0
            s=1;
        end

        if mm>0
            for np=mm;2;i-2
                cx=fix(.5 * (np * (np+2)+s * mm))+1;
                cy=fix(.5 * (np * (np+2)-s * mm))+1;
                Dx(r,cx)=(1+delta) * (np+1);
```

```

        Dy(r,cy)=-s*(1+delta)*(np+1);
    end
end
if mm==0&s>0
    for np=mm:2:i-2
        cx=fix(.5*np*(np+2))+1;
        Dx(r,cx)=(1+delta)*(np+1);
    end
end
if mm==0&s<0
    for np=mm:2:i-2
        cy=fix(.5*np*(np+2))+1;
        Dy(r,cy)=-s*(1+delta)*(np+1);
    end
end
for np=mp:2:i-2
    cx=fix(.5*(np*(np+2)+s*mp))+1;
    cy=fix(.5*(np*(np+2)-s*mp))+1;
    Dx(r,cx)=(1+delta)*(np+1);
    Dy(r,cy)=s*(1+delta)*(np+1);
end
end
end

```


附 录 E
(资料性附录)
归一化泽尼克多项式函数表
(到第六径向阶数)

表 E.1

符号	极坐标形式	笛卡尔坐标形式	常用名
Z_0^0	1	1	平移-平均高度
Z_1^{-1}	$2\rho\sin(\theta)$	$2y$	垂直倾斜
Z_1^1	$2\rho\cos(\theta)$	$2x$	水平倾斜
Z_2^{-2}	$\sqrt{6}\rho^2\sin(2\theta)$	$2\sqrt{6}xy$	斜轴散光
Z_2^0	$\sqrt{3}(2\rho^2-1)$	$\sqrt{3}(2x^2+2y^2-1)$	近视性离焦(正系数值) 远视性离焦(负系数值)
Z_2^2	$\sqrt{6}\rho^2\cos(2\theta)$	$\sqrt{6}(x^2-y^2)$	逆规性像散(正系数值) 循规性像散(负系数值)
Z_3^{-3}	$\sqrt{8}\rho^3\sin(3\theta)$	$\sqrt{8}(3x^2y-y^3)$	斜向三叶形
Z_3^{-1}	$\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\sin(\theta)$	$\sqrt{8}(3x^2y+3y^3-2y)$	垂直彗差 高度陡斜(正系数值) 垂直彗差 轻度陡斜(负系数值)
Z_3^1	$\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\cos(\theta)$	$\sqrt{8}(3x^3+3xy^2-2x)$	水平彗差
Z_3^3	$\sqrt{8}\rho^3\cos(3\theta)$	$\sqrt{8}(x^3-3xy^2)$	水平三叶形
Z_4^{-4}	$\sqrt{10}\rho^4\sin(4\theta)$	$\sqrt{10}(4x^3y-4xy^3)$	斜向四叶形
Z_4^{-2}	$\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\sin(2\theta)$	$\sqrt{10}(8x^3y+8xy^3-6xy)$	二级斜轴散光
Z_4^0	$\sqrt{5}(6\rho^4-6\rho^2+1)$	$\sqrt{5}(6x^4+12x^2y^2+6y^4-6x^2-6y^2+1)$	球差 正系数值 瞳孔外围比中间部分近视程度高 负系数值 瞳孔外围比中间部分远视程度高
Z_4^2	$\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\cos(2\theta)$	$\sqrt{10}(4x^4-4y^4-3x^2+3y^2)$	二级循规性/逆规性散光
Z_4^4	$\sqrt{10}\rho^4\cos(4\theta)$	$\sqrt{10}(x^4-6x^2y^2+y^4)$	水平四叶形
Z_5^{-5}	$\sqrt{12}\rho^5\sin(5\theta)$	$\sqrt{12}(5x^4y-10x^2y^3+y^5)$	
Z_5^{-3}	$\sqrt{12}(5\rho^5-4\rho^3)\sin 3\theta$	$\sqrt{12}(15x^4y+10x^2y^3-12x^2y-5y^5+4y^3)$	
Z_5^{-1}	$\sqrt{12}(10\rho^5-124\rho^3+3\rho)\sin(\theta)$	$\sqrt{12}(10x^4y+20x^2y^3+10y^5-12x^2y-12y^3+3y)$	

表 E.1 (续)

符号	极坐标形式	笛卡尔坐标形式	常用名
Z_1^2	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 124\rho^3 + 3\rho)\cos(\theta)$	$\sqrt{12}(10x^5 + 20x^3y^2 + 10xy^4 - 12xy^2 - 12x^3 + 3x)$	
Z_2^2	$\sqrt{12}(5\rho^5 - 4\rho^3)\cos(3\theta)$	$\sqrt{12}(5x^5 - 10x^3y^2 + 12xy^2 - 15xy^4 - 4x^3)$	
Z_3^2	$\sqrt{12}\rho^5\cos(5\theta)$	$\sqrt{12}(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4)$	
Z_4^2	$\sqrt{14}\rho^6\sin(6\theta)$	$\sqrt{14}(6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5)$	
Z_5^2	$\sqrt{14}(6\rho^6 - 5\rho^4)\sin(4\theta)$	$\sqrt{14}(24x^5y - 20x^3y^3 - 24xy^5 + 20xy^3)$	
Z_6^2	$\sqrt{14}(15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2)\sin(2\theta)$	$\sqrt{14}(30x^5y + 60x^3y^3 + 30xy^5 - 40x^3y - 40xy^3 + 12xy)$	
Z_7^2	$\sqrt{7}(20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1)$	$\sqrt{7}(20x^6 + 60x^4y^2 + 60x^2y^4 + 20y^6 - 30x^4 - 60x^2y^2 - 30y^4 + 12x^2 + 12y^2 - 1)$	
Z_8^2	$\sqrt{14}(15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2)\cos(2\theta)$	$\sqrt{14}(15x^6 + 15x^4y^2 - 15x^2y^4 - 15y^6 - 20x^4 + 20y^4 + 6x^2 - 6y^2)$	
Z_9^2	$\sqrt{14}(6\rho^6 - 5\rho^4)\cos(4\theta)$	$\sqrt{14}(6x^6 - 30x^4y^2 - 30x^2y^4 + 6y^6 - 5x^4 + 30x^2y^2 - 5y^4)$	
Z_{10}^2	$\sqrt{14}\rho^6\cos(6\theta)$	$\sqrt{14}(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6)$	
<p>注 1: 变量 ρ 的取值范围可能只是 0 到 1 之间。变量 x 和 y 的值是有限制的从而确保 $(x^2 + y^2)$ 的取值范围只在 0 到 1 之间。</p> <p>注 2: 泽尼克系数表示波前像差,而一般在眼科光学中才会考虑校正像差。因此上面表中,泽尼克系数表示波前像差而非校正这一像差,散光的轴由一般眼科光学惯例旋转 90° 时,散光可以用负圆柱的形式表示。</p>			